数理解析研究所講究録 1262 巻 2002 年 75-83

Standard Paths Fixed by a Diagram Automorphism

佐垣 大輔 (Daisuke SAGAKI)
筑波大学大学院 数学研究科
Graduate School of Mathematics,
University of Tsukuba
sagaki@math.tsukuba.ac.jp

内藤 聡 (Satoshi NAITO)
筑波大学 数学系
Institute of Mathematics,
University of Tsukuba
naito@math.tsukuba.ac.jp

http://www.math.tsukuba.ac.jp/~sagaki/ から,
プレプリントをダウンロード可能 (2002 年 1 月現在)

0 Introduction.

[NS3] において, 我々は Dynkin 図形のグラフ自己同型の作用と, standard path, および standard monomial の関係を調べ, これらを用いて, [FRS], [FSS] で得られた, symmetrizable Kac-Moody algebra 上の integrable highest weight module の twining character に関する公式や, [KN], [S] で得られた Demazure module の twining character に関する公式の別証明を与えた. 本稿では, これらの結果を簡単に説明する.

1 Preliminaries.

1.1 Kac-Moody algebras.

Kac-Moody algebra に関する記号は以下の通り:

$A=(a_{ij})_{i,j\in I}$: symmetrizable generalized Cartan matrx (GCM) with $\#(I)<\infty$

$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(A)$: symmetrizable Kac-Moody algebra/$\mathbb{C}$ associated to A

$\mathfrak{h}$: Cartan subalgebra of $\mathfrak{g}$

$\{\alpha_i\}_{i\in I}$: the set of simple roots, $\{\alpha_i^\vee\}_{i\in I}$: the set of simple coroots

$\{x_i,y_i\}_{i\in I}$: Chavalley generators, where $x_i\in\mathfrak{g}_{\alpha_i}$ and $y_i\in\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$

$\mathfrak{n}_+$: the sum of positive root spaces

$\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$: Borel subalgebra of $\mathfrak{g}$

W : Weyl group of $\mathfrak{g}$

$L(\lambda) = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{h}^*} L(\lambda)_\chi$: irreducible highest weight module of highest weight λ
$L_w(\lambda) := U(\mathfrak{b}) L(\lambda)_{w(\lambda)}$: Demazure module of lowest weight $w(\lambda)$ in $L(\lambda)$, where λ is a dominant integral weight and $w \in W$

1.2 Diagram automorphisms. $\omega : I \to I$ を bijection で,

$$a_{\omega(i),\omega(j)} = a_{ij} \quad \text{for all } \ i,\, j \in I \tag{1.2.1}$$

を満たすものとする. すなわち, ω は GCM A の Dynkin 図形のグラフ自己同型である (diagram automorphism). このとき, ω は $\mathfrak{g}$ の自己同型 $\omega \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ で, $\omega(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ および

$$\begin{cases} \omega(x_i) = x_{\omega(i)} & \text{for } \ i \in I, \\ \omega(y_i) = y_{\omega(i)} & \text{for } \ i \in I, \\ \omega(\alpha_i^\vee) = \alpha_{\omega(i)}^\vee & \text{for } \ i \in I, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

を満たすものを誘導する (see [FSS, §3.2] and [S, §1.1]). $\omega^* : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ を

$$(\omega^*(\lambda))(h) := \lambda(\omega^{-1}(h)) \quad \text{for } \ \lambda \in \mathfrak{h}^*,\, h \in \mathfrak{h} \tag{1.2.3}$$

で定め,

$$(\mathfrak{h}^*)^0 := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \omega^*(\lambda) = \lambda\}, \qquad \widetilde{W} := \{w \in W \mid \omega^* w = w \omega^*\} \tag{1.2.4}$$

とおく. $(\mathfrak{h}^*)^0$ の元は symmetric weight と呼ばれる.

$P \subset \mathfrak{h}^*$ を ω^*-stable な integral weight lattice で, 任意の $i \in I$ に対して, $\alpha_i \in P$ であるものとし,

$$P_+ := \{\lambda \in P \mid \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ for all } i \in I\} \tag{1.2.5}$$

と定める.

$\lambda \in P_+ \cap (\mathfrak{h}^*)^0$ とする. このとき, ω で生成される巡回群 $\langle \omega \rangle$ の $L(\lambda)$ への作用で, 以下を満たすものが唯一つ存在することが知られている (cf. [NS1, §4.1]):

$$\begin{cases} \omega \cdot (xv) = \omega(x)(\omega \cdot v) & \text{for } \ x \in \mathfrak{g},\, v \in L(\lambda), \\ \omega \cdot v_\lambda = v_\lambda & \text{for } \ v_\lambda \in L(\lambda)_\lambda. \end{cases} \tag{1.2.6}$$

また, $w \in \widetilde{W}$ であるとき, $L_w(\lambda)$ はこの $\langle\omega\rangle$ の作用で不変であることが分かる. そこで, $L(\lambda)$ の restricted dual $L(\lambda)^*$ および $L_w(\lambda)^*$ への $\langle\omega\rangle$ の作用を,

$$(\omega \cdot f)(v) = f(\omega^{-1} \cdot v) \quad \text{for} \begin{cases} f \in L(\lambda)^* & (\text{resp. } f \in L_w(\lambda)^*), \\ v \in L(\lambda) & (\text{resp. } v \in L_w(\lambda)), \end{cases} \tag{1.2.7}$$

で定める.

1.3 Orbit Lie algebras. $i, j \in I$ に対して,

$$c_{ij} := \sum_{k=0}^{N_j-1} a_{i,\omega^k(j)} \tag{1.3.1}$$

とおく. ここで, $N_i := \#\{\omega^k(i) \mid k \geq 0\}$ である. I における ω-orbit の完全代表系 $\widehat{I}$ を取り, $\check{I} := \{i \in \widehat{I} \mid c_{ii} > 0\}$ とおく. さらに,

$$\widehat{a}_{ij} := 2c_{ij}/c_j \quad \text{for } i, j \in \widehat{I} \tag{1.3.2}$$

とする. ここで,

$$c_i := \begin{cases} c_{ii} & \text{if } i \in \check{I}, \\ 2 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{1.3.3}$$

とする. このとき, 次の命題が成立する (see [FRS, Lemma 2.1]).

Proposition 1.1. $\widehat{A} := (\widehat{a}_{ij})_{i,j\in\widehat{I}}$ は, symmetrizable Borcherds-Cartan matrix であり, $\widehat{A} := (\widehat{a}_{ij})_{i,j\in\check{I}}$ は, symmetrizable GCM である. □

$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}(\widehat{A})$ を $\widehat{A}$ に付随した generalized Kac-Moody algebra とし, $\widehat{\mathfrak{h}}$ を Cartan subalgebra, $\{\widehat{x}_i, \widehat{y}_i\}_{i\in\widehat{I}}$ を Chevalley generators, $\widehat{W}$ を Weyl group とする.

Definition 1.2. $\widehat{\mathfrak{h}}$ と $\{\widehat{x}_i, \widehat{y}_i\}_{i\in\check{I}}$ で生成される $\widehat{\mathfrak{g}}$ の subalgebra を $\breve{\mathfrak{g}}$ で表し, これを ω に対する orbit Lie algebra と呼ぶ.

次の命題が知られている (see [FRS, Propositon 3.3 and Corollary 3.4]):

Proposition 1.3. 線形同型写像 $P_\omega^* : \widehat{\mathfrak{h}}^* \to (\mathfrak{h}^*)^0$ および群同型写像 $\Theta : \widehat{W} \to \widetilde{W}$ で, 任意の $\widehat{w} \in \widehat{W}$ に対して,

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathfrak{h}} & \xrightarrow{\widehat{w}} & \widehat{\mathfrak{h}} \\ {\scriptstyle P_\omega^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P_\omega^*} \\ (\mathfrak{h}^*)^0 & \xrightarrow[\Theta(\widehat{w})]{} & (\mathfrak{h}^*)^0 \end{array} \tag{1.3.4}$$

が可換になるものが存在する. □

2 Path Models.

このセクションでは path model について復習する (cf. [L1]–[L5]).

2.1 Notation. 区分的に線形で連続な写像 $\pi : [0,1] \to \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{h}^*$ で, $\pi(0) = 0$ を満たすものを, path と呼ぶ. ここで, 2つの path π, π' に対して, 区分的に線形で, 全射な非減少連続関数 ψ, $\psi' : [0,1] \to [0,1]$ で, $\pi \circ \psi = \pi' \circ \psi'$ を満たすものが存在するとき, π と π' を同一視することにする (reparametrization). $\mathbb{B}$ を path 全体の集合 (modulo reparametrization) とし, $\mathbb{B}_{\mathrm{int}} := \{\pi \in \mathbb{B} \mid \pi(1) \in P\}$ とおく.

$e_i : \mathbb{B}_{\mathrm{int}} \cup \{\theta\} \to \mathbb{B}_{\mathrm{int}} \cup \{\theta\}$ および $f_i : \mathbb{B}_{\mathrm{int}} \cup \{\theta\} \to \mathbb{B}_{\mathrm{int}} \cup \{\theta\}$ を, α_i に関する raising root operator, lowering root operator とする (cf. [L2, §1]). ここで, θ は, 適当な symbol である.[1] これらの root operator を用いて, $\mathbb{B}_{\mathrm{int}}$ には, crystal の構造が入ることが知られている.

2.2 Lakshmibai-Seshadri paths. path model の理論において, 最も基本的な path は Lakshmibai-Seshadri path (L-S path) である. $\lambda \in P_+$ とする. shape λ の L-S path とは, "chain condition" と呼ばれる条件を満たす, $W\lambda$ に含まれる weight の列 $\underline{\nu} : \nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_s$ (ここで, $\geq$ は $W\lambda$ 上の "Bruhat order") と有理数の列 $\underline{a} : 0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_s = 1$ の組 $(\underline{\nu} : \underline{a})$ で定まる path のことである. $\mathbb{B}(\lambda)$ で, shape λ の L-S path 全体の集合を表し,

$$\mathbb{B}_w(\lambda) := \{(\nu_1, \ldots ; \underline{a}) \in \mathbb{B}(\lambda) \mid \nu_1 \leq w(\lambda)\} \tag{2.2.1}$$

とおく. このとき, 次の定理が成立する.

Theorem 2.1 ([L1] and [L2]). (1) $\mathbb{B}(\lambda) \subset \mathbb{B}_{\mathrm{int}}$.

(2) $\mathbb{B}(\lambda) \cup \{\theta\}$ は root operator で不変である.

(3) 任意の $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ に対して, $i_1, i_2, \ldots, i_k \in I$ が存在して, $\pi = f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_k} \pi_\lambda$ となる. ここで, $\pi_\lambda(t) := (\lambda ; 0, 1) = t\lambda$ である.

(4) $\{\pi \in \mathbb{B}(\lambda) \mid e_i \pi = \theta \text{ for all } i \in I\} = \{\pi_\lambda\}$.

(5)

$$\sum_{\pi \in \mathbb{B}(\lambda)} e(\pi(1)) = \mathrm{ch}\, L(\lambda), \qquad \sum_{\pi \in \mathbb{B}_w(\lambda)} e(\pi(1)) = \mathrm{ch}\, L_w(\lambda), \tag{2.2.2}$$

が成立する. □

[1] crystal の理論における "0" に対応する. 任意の $t \in [0,1]$ に対して $\pi(t) = 0$ という path と区別するために別の記号を使うことにした.

2.3 Standard paths. 2つの path $\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{B}_{\mathrm{int}}$ に対して,

$$(\pi_1 * \pi_2)(t) := \begin{cases} \pi_1(2t) & \text{if } 0 \le t \le 1/2, \\ \pi_1(1) + \pi_2(2t-1) & \text{if } 1/2 \le t \le 1, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

と定める (π_1 と π_2 の concatenation). このとき, $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in \mathbb{B}_{\mathrm{int}}$ に対して, modulo reparametrization で, $(\pi_1 * \pi_2) * \pi_3 = \pi_1 * (\pi_2 * \pi_3)$ が成立することが分かる.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in P_+$ とする. $\pi_i \in \mathbb{B}(\lambda_i)$ に対して,

$$\mathrm{Cat}_{i=1}^{n} \pi_i = \pi_1 * \pi_2 * \cdots * \pi_n \tag{2.3.2}$$

とし,

$$\mathrm{Cat}_{i=1}^{n} \mathbb{B}(\lambda_i) := \left\{ \mathrm{Cat}_{i=1}^{n} \pi_i \mid \pi_i \in \mathbb{B}(\lambda_i) \right\} \tag{2.3.3}$$

と定める.

Remark 2.2 (cf. [L2, Lemma 2.7]). $\mathrm{Cat}_{i=1}^{n} \mathbb{B}(\lambda_i) \cup \{\theta\}$ は root operator の作用で不変である. さらに, crystal として, $\mathrm{Cat}_{i=1}^{n} \mathbb{B}(\lambda_i) \cong \mathbb{B}(\lambda_1) \otimes \mathbb{B}(\lambda_2) \otimes \cdots \otimes \mathbb{B}(\lambda_n)$ である (Theorem 2.1 (1), (2) より, 各 $\mathbb{B}(\lambda_i)$ には crystal の構造が入る).

$\lambda := \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$, および $\underline{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ とする. $\pi_{\underline{\lambda}} := \mathrm{Cat}_{i=1}^{n} \pi_{\lambda_i} \in \mathrm{Cat}_{i=1}^{n} \mathbb{B}(\lambda_i)$ に root operator を作用させていって得られる path のことを shape $\underline{\lambda}$ の standard path と呼ぶ (すなわち, standard path とは $\mathbb{B}(\lambda_1) \otimes \mathbb{B}(\lambda_2) \otimes \cdots \otimes \mathbb{B}(\lambda_n)$ の highest weight component に含まれる元に対応する path のことである (cf. Remark 2.2)).

$\mathrm{Cat}_{i=1}^{n} \mathbb{B}(\lambda_i)$ の元が standard になるための必要十分条件が知られている:

Proposition 2.3 ([L3, Theorem 10.1 and Lemma 10.2]). $\pi_i = (\nu_{i,1}, \ldots, \nu_{i,s_i} ; \underline{a}_i) \in \mathbb{B}(\lambda_i)$ とする ($i = 1, 2, \ldots, n$). このとき, $\pi = \mathrm{Cat}_{i=1}^{n} \pi_i \in \mathrm{Cat}_{i=1}^{n} \mathbb{B}(\lambda_i)$ が, standard であるための必要十分条件は, $W\lambda$ の元の列 $\{\lambda_{i,j}\}_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,s_i}}$ (π に対する defining chain) で

(i) $\lambda_{1,1} \ge \cdots \ge \lambda_{1,s_1} \ge \lambda_{2,1} \ge \cdots \ge \lambda_{2,s_2} \ge \cdots\cdots \ge \lambda_{n,1} \ge \cdots \ge \lambda_{n,s_n}$,

(ii) $p_i(\lambda_{i,j}) = \nu_{i,j}$,

を満たすものが存在することである. ここで, $p_i : W\lambda \to W\lambda_i$ は canonical map である. さらに, standard path π に対して, π に対する defining chain $\{\lambda_{\pi;i,j}^{\min}\}_{i,j}$ で, 次の意味で最小のものが唯一つ存在する (minimal defining chain): 任意の π に対する defining chain $\{\lambda_{i,j}\}_{i,j}$ に対して, $\lambda_{\pi;i,j}^{\min} \le \lambda_{i,j}$ が, すべての i, j に対して成

$\mathbb{B}(\underline{\lambda})$ で, shape $\underline{\lambda}$ の standard path 全体の集合を表す. また, $w \in W$ に対して,

$$\mathbb{B}_w(\underline{\lambda}) := \left\{\pi \in \mathbb{B}(\underline{\lambda}) \mid \lambda^{\min}_{\pi;1,1} \le w(\lambda)\right\} \qquad (2.3.4)$$

とおく. このとき, $\mathbb{B}(\underline{\lambda})$ および $\mathbb{B}_w(\underline{\lambda})$ に対しても Theorem 2.1 と同様の事実が成り立つ. 例えば, 次の character formula が成立する:

$$\sum_{\pi \in \mathbb{B}(\underline{\lambda})} e(\pi(1)) = \mathrm{ch}\, L(\lambda), \qquad \sum_{\pi \in \mathbb{B}_w(\underline{\lambda})} e(\pi(1)) = \mathrm{ch}\, L_w(\lambda), \qquad (2.3.5)$$

3 Main Results.

以下では, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in P_+ \cap (\mathfrak{h}^*)^0$ および $w \in \widetilde{W}$ とする.

3.1 Standard paths fixed by ω^*. path π に対して, $(\omega^*(\pi))(t) := \omega^*(\pi(t))$ と定める. このとき, $\mathbb{B}(\underline{\lambda})$ および $\mathbb{B}_w(\underline{\lambda})$ は ω^*-stable であることが分かる. ここで,

$$\mathbb{B}^0(\lambda) := \left\{\pi \in \mathbb{B}(\lambda) \mid \omega^*(\pi) = \pi\right\}, \qquad \mathbb{B}^0_w(\lambda) := \mathbb{B}_w(\lambda) \cap \mathbb{B}^0(\lambda) \qquad (3.1.1)$$

とおく. また orbit Lie algebra に関する path $\widehat{\pi} : [0,1] \to \widehat{\mathfrak{h}}^*$ に対して, $(P^*_\omega(\widehat{\pi}))(t) := P^*_\omega(\widehat{\pi}(t))$ と定める. このとき, 次の定理が成立する.

Theorem 3.1 ([NS3, Theorem 4.4]). $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $\widehat{\lambda}_i := (P^*_\omega)^{-1}(\lambda_i)$ とし, $\widehat{\lambda} := \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 + \cdots + \widehat{\lambda}_n$ および $\underline{\widehat{\lambda}} := (\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \ldots, \widehat{\lambda}_n)$ とおく. また, $\widehat{w} := \Theta^{-1}(w)$ とする. このとき,

$$\mathbb{B}^0(\underline{\lambda}) = P^*_\omega(\breve{\mathbb{B}}(\underline{\widehat{\lambda}})), \qquad \mathbb{B}^0_w(\underline{\lambda}) = P^*_\omega(\breve{\mathbb{B}}_{\widehat{w}}(\underline{\widehat{\lambda}})) \qquad (3.1.2)$$

が成立する. ここで, $\breve{\mathbb{B}}(\underline{\widehat{\lambda}})$ は orbit Lie algebra $\breve{\mathfrak{g}}$ に関する shape $\underline{\widehat{\lambda}}$ の standard path 全体の集合であり, $\breve{\mathbb{B}}_{\widehat{w}}(\underline{\widehat{\lambda}})$ は, shape $\underline{\widehat{\lambda}}$ の standard path で, minimal defining chain の初項が $\widehat{w}(\widehat{\lambda})$ 以下のもの全体を表す. $\square$

Remark 3.2. $n = 1$ のとき, Theorem 3.1 は L-S path に対する主張になる (see [NS3, Theorem 4.2]). これは, [NS1, Theorem 3.2.4] の一般化になっている ([NS1] では, $\breve{I} = \widehat{I}$ (cf. §1.3) を満たす diagram automorphism のみを扱った).

3.2 Standard monomials fixed by ω. [L6] において, Littelmann は standard monomial と呼ばれる $\pi \in \mathbb{B}(\underline{\lambda})$ に付随したベクトル $p_\pi \in L(\lambda)^*$ を定義し, それら全体の集合 $\left\{p_\pi \mid \pi \in \mathbb{B}(\underline{\lambda})\right\}$ が $L(\lambda)^*$ の基底をなすことを示した (ここで p_π の

weight は $-\pi(1)$ である). さらに $\{p_\pi|_{L_w(\lambda)} \in L_w(\lambda)^* \mid \pi \in \mathbb{B}_w(\underline{\lambda})\}$ が $L_w(\lambda)$ の基底になることも示した. これらの standard monomial と $\langle\omega\rangle$ の $L(\lambda)^*$ 上への作用 (cf. §1.2) との関係は次の定理で与えられる:

Theorem 3.3 ([NS3, Theorem 4.6]). 任意の $\pi \in \mathbb{B}(\underline{\lambda})$ に対して, $\omega \cdot p_\pi = p_{\omega^*(\pi)}$ が成立する. したがって, p_π が ω で固定されるための必要十分条件は $\pi \in \mathbb{B}^0(\underline{\lambda})$ であることである. さらに, ω の作用で固定される standard monomial 全体の集合と orbit Lie algebra に関する standard monomial 全体の集合の間には次の自然な 1 対 1 対応が存在する: $p_\pi \xleftrightarrow{1:1} \breve{p}_{\widehat{\pi}}$. ここで, $\breve{p}_{\widehat{\pi}}$ は $\widehat{\pi} := (P_\omega^*)^{-1}(\pi) \in \breve{\mathbb{B}}(\widehat{\lambda})$ に付随した standard monomial である.

4 Twining Character Formulas.

前セクションの結果を使って, twining character formula を証明しよう.

4.1 Definition. $\lambda \in P_+ \cap (\mathfrak{h}^*)^0$, $w \in \widetilde{W}$ のとき, $L(\lambda)$ および $L_w(\lambda)$ の twining character はそれぞれ以下の式で与えられる:

$$\mathrm{ch}^\omega(L(\lambda)) := \sum_{\chi \in (\mathfrak{h}^*)^0} \mathrm{tr}\big(\omega|_{L(\lambda)_\chi}\big) e(\chi), \tag{4.1.1}$$

$$\mathrm{ch}^\omega(L_w(\lambda)) := \sum_{\chi \in (\mathfrak{h}^*)^0} \mathrm{tr}\big(\omega|_{L_w(\lambda)_\chi}\big) e(\chi). \tag{4.1.2}$$

4.2 Twining character formula.

Corollary 4.1 (see also [FRS], [KN], and [S]). $\widehat{\lambda} := (P_\omega^*)^{-1}(\lambda)$, $\widehat{w} := \Theta^{-1}(w)$ とおく. このとき, 次の公式が成立する:

$$\mathrm{ch}^\omega(L(\lambda)) = P_\omega^*(\mathrm{ch}\,\breve{L}(\widehat{\lambda})), \qquad \mathrm{ch}^\omega(L_w(\lambda)) = P_\omega^*(\mathrm{ch}\,\breve{L}_{\widehat{w}}(\widehat{\lambda})). \tag{4.2.1}$$

ここで, $\breve{L}(\widehat{\lambda})$ は, highest weight $\widehat{\lambda}$ の integrable highest weight $\breve{\mathfrak{g}}$-module であり, $\breve{L}_{\widehat{w}}(\widehat{\lambda}) \subset \breve{L}(\widehat{\lambda})$ は, $\breve{\mathfrak{g}}$ に関する Demazure module である.

Proof. $L(\lambda)$ に関する公式のみ示そう ($L_w(\lambda)$ についても同様である). まず, $L(\lambda)^*$ の twining character を

$$\mathrm{ch}^\omega(L(\lambda)^*) := \sum_{\chi \in (\mathfrak{h}^*)^0} \mathrm{tr}\big(\omega|_{(L(\lambda)^*)_\chi}\big) e(\chi).$$

で定める. §3.2 で説明した通り, $\{p_\pi \in L(\lambda)^* \mid \pi \in \mathbb{B}(\underline{\lambda}) \text{ with } -\pi(1) = \chi\}$ は, $(L(\lambda)^*)_\chi$ の基底になっている. また, Theorem 3.3 の前半の主張により, $\chi \in (\mathfrak{h}^*)^0$ であれば, この基底は $\langle\omega\rangle$ の作用で保たれることが分かる. したがって,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\big(\omega|_{(L(\lambda)^*)_\chi}\big) &= \#\{p_\pi \mid \omega \cdot p_\pi = p_\pi,\ \pi \in \mathbb{B}(\underline{\lambda}) \text{ with } -\pi(1) = \chi\} \\ &= \#\{\pi \in \mathbb{B}^0(\underline{\lambda}) \mid -\pi(1) = \chi\} \qquad \text{by Theorem 3.3,}\end{aligned}$$

となり, よって

$$\mathrm{ch}^\omega(L(\lambda)^*) = \sum_{\pi \in \mathbb{B}^0(\underline{\lambda})} e(-\pi(1)) \tag{4.2.2}$$

となる. [KN, Theorem 3.2.2] の証明より, $\mathrm{ch}^\omega(L(\lambda)^*) = \sum_{\chi \in (\mathfrak{h}^*)^0} c_\chi e(\chi)$ とすると, $\mathrm{ch}^\omega(L(\lambda)) = \sum_{\chi \in (\mathfrak{h}^*)^0} c_\chi e(-\chi)$ となることが分かる. したがって,

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}^\omega(L(\lambda)) &= \sum_{\pi \in \mathbb{B}^0(\underline{\lambda})} e(\pi(1)) \quad \text{by (4.2.2)} \\ &= P_\omega^*\Big(\sum_{\widehat{\pi} \in \breve{\mathbb{B}}(\widehat{\lambda})} e(\widehat{\pi}(1))\Big) \quad \text{by Theorem 3.1} \\ &= P_\omega^*(\mathrm{ch}\,\breve{L}(\widehat{\lambda})) \quad \text{by (2.3.5).}\end{aligned}$$

となり, 公式が得られる. □

References.

[FRS] J. Fuchs, U. Ray, and C. Schweigert, Some automorphisms of generalized Kac-Moody algebras, *J. Algebra* **191** (1997), 518–540.

[FSS] J. Fuchs, B. Schellekens, and C. Schweigert, From Dynkin diagram symmetries to fixed point structures, *Comm. Math. Phys.* **180** (1996), 39–97.

[KN] M. Kaneda and S. Naito, A twining character formula for Demazure modules, preprint.

[KK] S.-J. Kang and J.-H. Kwon, Graded Lie superalgebras, supertrace formula, and orbit Lie superalgebras, *Proc. London Math. Soc.* **81** (2000), 675–724.

[L1] P. Littelmann, A Littlewood-Richardson rule for symmetrizable Kac-Moody algebras, *Invent. Math.* **116** (1994), 329–346.

[L2] P. Littelmann, Paths and root operators in representation theory, *Ann. of Math.* **142** (1995), 499–525.

[L3] P. Littelmann, A plactic algebra of semisimple Lie algebras, *Adv. Math.* **124** (1996), 312–331.

[L4] P. Littelmann, Characters of representations and paths in $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, *in* "Representation Theory and Automorphic Forms" (T. N. Bailey and A. W. Knapp, Eds.), Proc. Sympos. Pure Math. Vol. 61, pp. 29–49, Amer. Math. Soc., Providence, 1997.

[L5] P. Littelmann, The path model, the quantum Frobenius map and standard monomial theory, *in* "Algebraic Groups and Their Representations" (R. W. Carter and J. Saxl, Eds.), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Vol. 517, pp. 175–212, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[L6] P. Littelmann, Contracting modules and standard monomial theory for symmetrizable Kac-Moody algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **11** (1998), 551–567.

[N1] S. Naito, Twining character formula of Kac-Wakimoto type for affine Lie algebras, preprint.

[N2] S. Naito, Twining characters and Kostant's homology formula, preprint.

[N3] S. Naito, Twining characters, Kostant's homology formula, and the Bernstein-Gelfand-Gelfand resolution, to appear in *J. Math. Kyoto Univ.*

[N4] S. Naito, Twining character formula of Borel-Weil-Bott type, preprint.

[NS1] S. Naito and D. Sagaki, Lakshmibai-Seshadri paths fixed by a diagram automorphism, *J. Algebra* **245** (2001), 395–412, doi:10.1006/jabr.2001.8904.

[NS2] S. Naito and D. Sagaki, Certain modules with twining maps and decomposition rules of Littelmann type, to appear in *Comm. Algebra.*

[NS3] S. Naito and D. Sagaki, Standard paths and standard monomials fixed by a diagram automorphism, to appear in *J. Algebra.*

[S] D. Sagaki, Crystal bases, path models, and a twining character formula for Demazure modules, to appear in *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*